Soluție

1. a) Din primele două ecuații rezultă că dacă $(x_0, y_0, 0, 0)$ este soluție, atunci $x_0 = 0,\ y_0 = \frac{1}{3}$. Din a treia ecuație rezultă $p = -2$.

b) Matricea sistemului, notată *A*, conține minorul $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, deci $\operatorname{rang} A \geq 2,\ \forall\ m, n \in \mathbb{R}$.

c) Dacă $\operatorname{rang} A = 2$, orice minor de ordin 3 al matricei *A* este nul. Se obține astfel $m = 2,\ n = -12.$ Alegând minorul principal $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$ din teorema Rouché rezultă $p = -2.$

2. a) Se verifică prin calcul direct asociativitatea şi comutativitatea. Elementul neutru este $(1, 0)$ iar simetricul unui element (q, k) este elementul $\left(\frac{1}{q}, -k\right) \in G.$

b) $(1,1) * (1,2) * ... * (1,10) = (1, 1 + 2 + ... + 10) = (1, 55)$.

c) <u>*f* morfism</u>: $f\left((q_1, k_1) * (q_2, k_2)\right) = q_1 q_2 2^{k_1 + k_2} = f(q_1, k_1) \cdot f(q_2, k_2), \forall (q_1, k_1), (q_2, k_2) \in G$.

<u>*f* injectivă</u>: Fie $(q_1, k_1), (q_2, k_2) \in G$, $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ şi $q_2 = \frac{m_2}{n_2},\ m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ impare astfel încât $f(q_1, k_1) = f(q_2, k_2)$. Dacă $k_1 \neq k_2$, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $k_1 < k_2$. Atunci, din $q_1 \cdot 2^{k_1} = q_2 \cdot 2^{k_2}$, rezultă $m_1 n_2 = 2^{k_2 - k_1} m_2 n_1$, contradicție, deoarece membrul stâng este impar, iar membrul drept este par. Ca urmare, $k_1 = k_2$, de unde $q_1 = q_2$.

<u>*f* surjectivă</u>: pentru orice număr rațional $r = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z}^*$, există $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ impare şi $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = 2^a m_1$ şi $n = 2^b n_1$. Notând $q = \frac{m_1}{n_1},\ k = a - b,$ rezultă $f(q, k) = \frac{m}{n}.$